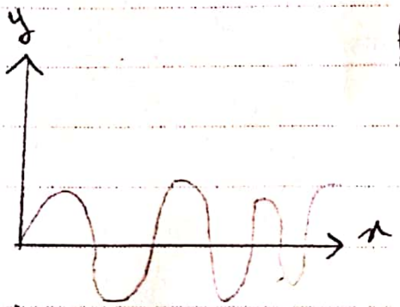
المحاضرة العاشرة 29/6/2020

تحويلات فورية :

تعريف: ليكن $f(x)$ دالة عندها نقول عن $f(x)$ أنها دالة دورية إذا وجد عدد $T \neq 0$ بحيث:

$$f(x+T)=f(x)$$



ندعو أصغر عدد T يحقق ما سبق بدور الدالة $f(x)$

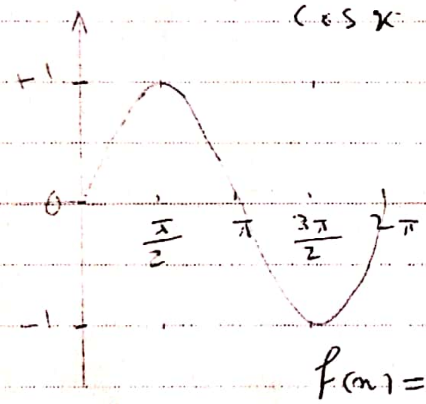
مثال: $\sin x$

$\cos x$

دالة دورية دورها 2π.

$\tan x$ دالة دورية دورها π.

$\sin nx$ " " دورها $\frac{2\pi}{n}$ ، وكذلك $\cos x$



نشر فورييه :

لتكن $f(x)$ دالة دورية دورها $T_0 \neq 0$ ، ومطردة (متراصة أو مستمرة) ومحددة على مجال تعريفها ← عندها $f(x)$ يمكن كتابتها على شكل نشر فورييه بالتالي :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos(k w_0 x)+b_k \sin(k w_0 x)\right)$$

حيث

$$\boxed{w_0=\frac{2\pi}{T_0}}$$

حيث وان

$$a_0=\frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(x)\,dx$$

$$a_k=\frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(x)\cos(k w_0 x)\,dx$$

$$b_k=\frac{2}{T_0}\int_{T_0} f(x)\sin(k w_0 x)\,dx$$

حيث $\int_{T_0}$ هو التكامل خلال دور الدالة.

مثال: لتكن $f(x)$ دالة دورية دورها 2π معرفة على $]-\pi, \pi[$
بالشكل التالي: $f(x) = x$

والمطلوب: أوجد نشر فورييه المثلثي للدالة $f(x)$.

الحل:

$$T_0 = 2\pi \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos Kx + b_K \sin Kx$$

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$ « نكرر الشطر »

$$a_K = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(Kx)\,dx$$

$$b_K = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(Kx)\,dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right) = 0$$

$$a_K = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underset{u}{x} \cos Kx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin Kx}{K}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin Kx}{K}\,dx \right)$$

$-\sin(\theta) = \sin(-\theta)$ / $\cos -\theta = \cos\theta$

$$a_K = \frac{1}{\pi}\left(\pi \frac{\sin K\pi}{K} + \frac{\pi \sin(-K\pi)}{K}\right) + \frac{1}{K^2}\cos Kx \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi \frac{\sin Kx}{K} - \pi\frac{\sin K\pi}{K}\right) + \frac{1}{\pi K^2}(\cos K\pi - \cos K\pi)$$

$$= \frac{1}{\pi}(0) + \frac{1}{\pi K^2}(0) = 0$$

$\cos\theta = \cos -\theta$

$\sin -\theta = -\sin\theta$

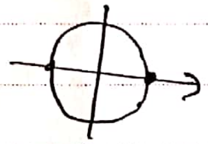
$$b_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin Kx\,dx$$

$$b_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\sin Kx\,dx$$

$$b_K = \frac{1}{\pi}\left(-2\pi\frac{\cos \pi K}{K}\right) + \frac{1}{K\pi}\left(\frac{\sin \pi K}{K} - \frac{\sin(-\pi K)}{K}\right)$$

لكن:

ملاحظة رئيسة $\boxed{\sin K\pi = 0}$; $K \in N$



$$\Rightarrow b_K = \frac{1}{\pi}\left(-2\pi\frac{\cos K\pi}{K}\right) + 0$$

$$b_K = -\frac{2}{K}\cos K\pi = \begin{cases} -\frac{2}{K}(1) = -\frac{2}{K} & \text{K زوجي} \\ -\frac{2}{K}(-1) = +\frac{2}{K} & \text{K فردي} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner